

Проективная динамика и достаточность реперов

ПРОЕКТ «ЛОГИКА КУРПИШЕВА 2» · МАСТЕР-2 · RUN-035 / ARBD47

Иван Борисович Курпишев. Исследовательский выпуск от 16 сентября 2026 года. Преемственность: RUN-025 → RUN-034 → RUN-035. Тома I-V и прежние источниковые досье не редактируются.

Аннотация

Строится исполнимый условный слой предсказательного реперного метода на проективной прямой. Три различных репера задают нормализованную координату; закон движения вводится отдельной гипотезой. Рассмотрен класс проективностей, фиксирующих два репера по отдельности. Для конечного множества допустимых параметров и начальных состояний выведен точный критерий достаточности наблюдений при ограниченной абсолютной погрешности. Минимальный набор каналов находится как покрытие пар сценариев, прогнозы которых различаются больше допустимой ошибки.

Показано, что гармоническое отношение сохраняется при разных законах движения и само по себе не идентифицирует прогноз. Разделены идентификация параметра, определённость целевого состояния и событие на заданном горизонте. Получена точная формула переноса интервала погрешности через реперную координату; наличие полюса исключает конечную скалярную границу.

Программная реализация использует рациональную арифметику BigInt и прежний модуль наблюдений RUN-025. Все числовые примеры синтетические. Связь высказываний Канта с измеряемыми величинами остаётся незаполненной; независимое испытание реального корпуса не проводилось.

Доказательный статус

Математические утверждения ниже доказаны в явно заданных моделях. Классические свойства проективной прямой не объявляются новыми теоремами. Вклад этого выпуска в проект: единый проверяемый переход от проективного репера и ограниченной динамики к точному выбору наблюдений, обработке погрешности и машинному отказу при нарушении предпосылок.

SCIENCE=ABSTAIN, truth_layer_promotion=0.

1. Реперная координата и гармоническая пара

Работаем над полем рациональных чисел; утверждения без вычислительных ограничений верны также над вещественными числами. Точка проективной прямой задаётся ненулевой парой $X=[x_0:x_1]$ с отождествлением пропорциональных пар. Обозначим определитель двух представителей через Δ .

$$\Delta(X, Y) = x_0 y_1 - x_1 y_0, \quad [A, B; X, Y] = \frac{\Delta(A, X)\Delta(B, Y)}{\Delta(A, Y)\Delta(B, X)}.$$

Порядок точек в двойном отношении фиксирован этой формулой. Для репера $R=(A, B, C)$, состоящего из трёх различных точек, определим H_R как проективное отображение, заданное следующей однородной парой. Его аффинное значение обозначаем h_R там, где знаменатель ненулевой.

$$H_R(X) = [\Delta(X, A)\Delta(C, B) : \Delta(X, B)\Delta(C, A)], \\ H_R(A) = 0, \quad H_R(B) = \infty, \quad H_R(C) = 1.$$

Предложение 1. Нормализация и ковариантность

H_R является единственной проективностью с указанными значениями. Для любой невырожденной проективности G выполнено $H_{GR}(GX) = H_R(X)$.

Доказательство: при линейном преобразовании каждый определитель умножается на $\det G$; общие множители сокращаются. Матрица H_R невырождена, поскольку A, B, C различны. Единственность следует из того, что проективность, фиксирующая $0, \infty$ и 1 , тождественна.

Предложение 2. Гармоническое сопряжение

$$J_R = H_R^{-1} \circ (z \mapsto -z) \circ H_R, \quad J_R^2 = \text{id}, \quad [A, B; X, J_R X] = -1 \quad (X \neq A, B).$$

Доказательство: в реперной координате двойное отношение равно $z/(-z)$. При $z \neq 0, \infty$ сопряжённые точки различны. Значение -1 является геометрическим инвариантом данной четвёрки. В приложенном авторском тексте о теореме Дезарга-Курпишева это же условие используется для гармонического сопряжения, с иным порядком обозначений [1, 4]. Предпосылки полной конфигурации двух коник здесь не используются и заново не доказываются.

2. Ограниченный закон движения

Реперы считаются фиксированными и точно заданными. Пусть q - ненулевой рациональный параметр. Введём диагональное проективное действие $D_q([u:v])=[qu:v]$ и его перенос в исходные координаты.

$$F_{R,q} = H_R^{-1} D_q H_R, \quad X_{n+1} = F_{R,q}(X_n), \quad z_n = q^n z_0.$$

Теорема 3. Классификация и сохранение гармоничности

Все проективности, фиксирующие A и B по отдельности, имеют ровно такой вид с единственным q . Каждая из них коммутирует с J_R . Доказательство: после сопряжения с H_R преобразование фиксирует 0 и ∞ , поэтому его матрица диагональна. Деление диагональных элементов даёт q . Диагональные матрицы D_q и $\text{diag}(-1,1)$ коммутируют. Следовательно, гармоническая пара сохраняется на каждом шаге.

Это ограниченный класс $\text{PGL}(2)$: обмен A и B , движение реперов, меняющийся во времени q и произвольная дробно-линейная динамика в него не включены. Случай $q=1$ допустим и даёт тождественное преобразование. В общем виде H_R сопрягает нелинейную дробно-линейную динамику с линейной скалярной рекуррентностью.

Контрпример: гармоничность не определяет q

Для $R=(0,\infty,1)$ и начальной пары $(1,-1)$ законы $q=1$ и $q=2$ сохраняют двойное отношение -1 , но дают состояния 1 и 8 на шаге 3 . Следовательно, $\lambda=-1$ не выбирает закон движения. Параметр q не является λ и не извлекается из одного условия гармоничности.

Контрпример: конечное согласие не доказывает постоянство закона

Префикс $1,2,4$ совместим как с постоянным $q=2$, так и с последовательностью множителей $2,2,3$. Следующие значения равны соответственно 8 и 12 . Оба движения сохраняют гармонические пары. Второе движение находится вне принятого автономного класса; исключение его является предпосылкой модели, а не следствием префикса.

Связь с KLT: фактические показания входят в компонент R авторского репера, цель прогноза - в I , допустимое семейство траекторий - в U , гипотеза динамики, калибровка и границы ошибок - в достаточное основание D . Эта типизация не удостоверяет сами предпосылки.

3. Идентификация закона и определённости цели

Пусть ненулевая конечная начальная координата z_0 известна точно. Отдельно рассматриваются множество параметров q и целевая величина $g_H(q, z_0)$ на горизонте H . Для координаты состояния $g_H = q^H z_0$; для события на горизонте $g_H = 1 \{q^H z_0 \geq a\}$. Последнее не означает первого достижения порога или события когда-либо.

Предложение 4. Временная неоднозначность знака

При точном наблюдении на шаге $j > 0$ два вещественных параметра q и q' неразличимы тогда и только тогда, когда $(q/q')^j = 1$. Если j нечётен, $q = q'$; если j чётен, допустимо $q = -q'$. В положительном классе одно точное наблюдение на любом положительном шаге идентифицирует q . Доказательство получается делением равенства $q^j z_0 = (q')^j z_0$ на ненулевое $(q')^j z_0$.

При наблюдении только чётных шагов $q = 2$ и $q = -2$ дают одинаковые показания. На нечётном целевом шаге 3 их состояния равны 8 и -8 . Нечётное наблюдение снимает эту неоднозначность в данном двухэлементном классе. На чётном целевом шаге состояния совпадают, хотя параметр может оставаться неизвестным.

Предложение 5. Целевая идентифицируемость

Пусть $f(\theta)$ обозначает всю точную наблюдаемую информацию о сценарии θ . Цель $g(\theta)$ определяется наблюдениями тогда и только тогда, когда g постоянна на каждом непустом слое $f^{-1}(y)$. Необходимость: одно и то же y не может определять два разных значения g . Достаточность: назначить каждому достижимому y единственное значение g на его слое.

При $X_0 = A$ или $X_0 = B$ все допустимые $F_{R,q}$ сохраняют состояние. Цель «будущая точка» определена без идентификации q . Бесконечная реперная координата B поддерживается проективным ядром; скалярный модуль с абсолютной ошибкой принимает только конечные координаты и явно отклоняет B .

Биективная смена проективных координат вместе с реперами сохраняет слои наблюдений. Она не создаёт недостающую информацию. Для реального прогноза должны быть обоснованы выбор семейства, измерительный смысл наблюдений и перенос их погрешности [2, 3].

4. Точная граница ошибки и минимальный набор реперов

Пусть Γ - непустое конечное множество сценариев, согласованных с уже полученными показаниями. Кандидатный канал j имеет значение $f_j(\theta)$ и ошибку $|e_j| \leq \varepsilon_j$. Допустимые ошибки образуют полный декартов продукт интервалов: скрытые корреляционные ограничения не предполагаются. Все выбранные каналы должны быть доступны к отсечению знаний.

Теорема 6. Минимаксный радиус фиксированного набора

$$\rho(S) = \frac{1}{2} \max_{\substack{\theta, \theta' \in \Gamma \\ |f_j(\theta) - f_j(\theta')| \leq 2\varepsilon_j \ (j \in S)}} |g(\theta) - g(\theta')|.$$

Это наименьшая возможная худшая абсолютная ошибка прогноза после чтения каналов S , среди всех детерминированных оценок и всех допустимых показаний. Доказательство верхней границы: при фиксированном векторе показаний g оставляем $\Gamma(g)$; середина между минимумом и максимумом g имеет ошибку не больше половины их разности. Любые два сценария из $\Gamma(g)$ удовлетворяют ограничениям под максимумом.

Доказательство нижней границы: для максимизирующей пары интервалы каждого выбранного канала пересекаются. Выберем по одному значению из каждого пересечения. Полученный общий вектор показаний допустим для обоих сценариев благодаря декартовой модели ошибок. Любая оценка ошибается на одном из двух значений не меньше половины их разности. Конечность Γ обеспечивает достижимость максимума. При пустом Γ расчёт останавливается; радиус ноль ему не присваивается.

Следствие 7. Критерий покрытия пар

$$\rho(S) \leq \eta \iff \forall \theta, \theta' \in \Gamma : |g(\theta) - g(\theta')| > 2\eta \Rightarrow \exists j \in S : |f_j(\theta) - f_j(\theta')| > 2\varepsilon_j.$$

Минимизация $|S|$ сводится к покрытию всех таких пар множествами пар, разделяемых отдельными каналами. Касание концов интервалов не является различием: требуется строгое неравенство. Отношение пересечения интервалов нетранзитивно, поэтому объединять связанные сценарии в классы по транзитивному замыканию нельзя.

Речь идёт о заранее фиксированном наборе, одинаковом для всех будущих показаний, а не об оптимальной адаптивной стратегии. Формула и перебор переиспользуют RUN-025; добавленная часть RUN-035 обеспечивает точное получение этих сценариев из проективной динамики.

5. Реперная координата и перенос погрешности

Абсолютная ошибка зависит от координаты. Нельзя объявлять евклидову длину интервала проективным инвариантом. Инвариантна нормализованная координата при совместном преобразовании состояния и точного репера; при переходе от показания в исходной координате к этой координате переносится всё множество допустимых значений.

Предложение 8. Образ интервала

$$h(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad d = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad h'(x) = \frac{d}{(\gamma x + \delta)^2}.$$

Если замкнутый конечный интервал $[l, u]$ не содержит полюса, h непрерывна и строго монотонна на нём. Поэтому его образ - интервал между $h(l)$ и $h(u)$. Точный минимаксный центр является средним этих двух концов, а радиус - половиной их абсолютной разности. Обычно этот центр не равен $h((l+u)/2)$.

Если интервал содержит полюс, хотя бы один его конец обращает знаменатель в ноль или значения знаменателя на концах имеют разные знаки. При невырожденной матрице числитель в полюсе не равен нулю. Проективное изображение определено, но не имеет конечной границы в выбранной скалярной координате. Алгоритм возвращает `ABSTAIN_CHART_POLE`.

$$h(x) = \frac{x}{2-x} : \quad [1/2, 3/2] \mapsto [1/3, 3], \quad c = \frac{5}{3}, \quad r = \frac{4}{3}, \quad h(1) = 1.$$

Локальная оценка устойчивости

При $|\gamma x + \delta| \geq d_0 > 0$ на всём рассматриваемом интервале теорема о среднем даёт $|h(x) - h(y)| \leq |\alpha\delta - \beta\gamma| \cdot |x - y| / d_0^2$. Удалённость от полюса должна быть установлена на всём интервале. Этот множитель меняется при выборе матричного представителя согласованно с d_0 , так что итоговая оценка не зависит от его общего масштаба.

Вычислительное ядро переносит интервалы точно рациональными числами. Неопределённость положения A, B, C здесь не учитывается. Ошибка калибровки реперов, коррелированные ошибки нескольких каналов и общая неопределённая дробно-линейная динамика остаются задачами следующего выпуска.

6. Вычислительный пример и исполнимый контракт

Пусть $z_0=1$, $Q=\{1,2\}$, горизонт $H=3$. Возможные траектории: $(1,1,1,1)$ и $(1,2,4,8)$. Исходный радиус ошибки состояния равен $7/2$. Каналы $X1$ и $X2$ относятся к шагам 1 и 2 и уже доступны до момента выдачи прогноза.

При $\varepsilon=0$ достаточно любого одного канала. При $\varepsilon=1$ интервалы $X1$ равны $[0,2]$ и $[1,3]$ и пересекаются; интервалы $X2$ равны $[0,2]$ и $[3,5]$ и не пересекаются. Минимальный набор - $\{X2\}$. При $\varepsilon=3/2$ интервалы $X2$ касаются, а при $\varepsilon=2$ оба канала совместно допускают общий вектор показаний. Ни один их фиксированный набор не гарантирует точного состояния.

Сам выбор $\{X2\}$ сохраняет текущий прогноз $\{1,8\}$. Получение показания $X2=4$ с $\varepsilon=1$ исключает первую траекторию и оставляет 8. Для события « $z_3 \geq 4$ » исходное множество равно $\{0,1\}$, радиус $1/2$; та же пара различающих наблюдений определяет событие. Для $Q=\{-2,2\}$ точное $X2$ не различает сценарии; $X1$ различает.

Точная передача в модуль RUN-025

Для всех рациональных значений, границ ошибок, показаний и допуска вычисляется общий знаменатель L . Величины умножаются на L и передаются в неизменённый `observations.js`. Неравенства сохраняются, а радиусы и центры при возврате делятся на L . Полуцелые радиусы представляются дробями со знаменателем $2L$, без округления.

Пределы реализации: не более 16 множителей и 16 начальных координат, 256 сценариев, 8 каналов, горизонт до 8; $L \leq 10^6$, модуль каждого целочисленного значения $\leq 10^6$. Превышение даёт явный отказ. Полнота относится только к декартову произведению перечисленных параметров и начальных состояний, не к непрерывному множеству всех возможных законов.

Контракт фиксирует хеш модели, точный репер, класс динамики, тип и единицу цели, погрешности, измерительные шаги, время доступности, отсечение знаний и выдачу прогноза. Модель фиксируется не позже отсечения; отсечение не позже выдачи; выдача строго раньше целевого момента. Поздний выбранный канал блокирует расчёт, даже если он доступен до выдачи, но после отсечения. Метки времени являются декларациями, не внешними временными свидетельствами.

Синтетические даты 2030 года не являются расписанием или реальными наблюдениями. Стандартная неопределённость не подставляется вместо абсолютной границы; режим реальных наблюдений данным адаптером не принимается.

7. Проверка, источниковая граница и продолжение

Проверки математического модуля

Новые тесты проверяют нормализацию однородных точек, бесконечность, вырождение репера, сингулярную матрицу, гармоническую инволюцию и её коммутирование с динамикой; 48 сочетаний смены координат, множителей и начальных состояний; соответствие матричного расчёта прямым целым степеням для 30 траекторий на шагах 0-8.

Для 36 семейств независимо перебраны допустимые целочисленные показания каналов: полученные худшие радиусы сопоставлены с результатом алгоритма. Проверяются касание интервалов, временная неоднозначность знака, различие выбора канала и получения показания, дробные траектории, поздняя доступность, подмена хеша, несовместимые показания, пределы точной арифметики и запрет повышения научного статуса. Для переноса интервалов проверены нелинейное смещение центра, убывающая координата и полюс внутри или на границе интервала.

Эти проверки удостоверяют реализацию объявленных конечных расчётов. Они не заменяют математические доказательства и независимое испытание предсказаний. Число успешных проверок всего ARBD и подтверждение публикации фиксируются отдельно в контрольной точке выпуска.

Типизированная связь с текстом Канта

Источник RUN-034 содержит кандидатную карту Фишер-Кант и различие надежды и уверенности у Канта. В RUN-035 текстовое утверждение имеет тип TEXTUAL_ASSERTION. Для перехода к OBSERVATION требуются определённый субъект, измеряемая величина, единица, протокол, калибровка, абсолютная погрешность и время доступности. Эти поля не заполнены: `bridge_status=NOT_ESTABLISHED`, `empirical_adapter_enabled=false`.

Числовые траектории не являются измерениями нравственного совершенствования. Мнения Фишера остаются внешним критическим слоем; историческая адресация не повышается до установленного опровержения Канта. Новые ответы читателей не создавались. Контракт RUN-029 не изменяется задним числом.

RUN-036: следующий математический этап

Ввести неопределённость реперов как отдельное допустимое множество калибровок. Вывести совместную границу прогноза при общей для каналов ошибке калибровки, не заменяя её независимыми ошибками без оценки потери. Исследовать более общий класс дробно-линейной динамики и сравнить идентификацию параметров с достаточностью для конкретной цели. Для эмпирического этапа сначала выбрать операциональную область и заранее фиксируемый базовый метод; пока сохранять DRAFT_NOT_FROZEN и NOT_RUN.

8. Библиография и границы использования источников

[1] Hitchin N. Projective Geometry. Lecture notes, глава «The Klein programme», §§5.1-5.2, печатные с.57-59. Используются определения PGL, двойного отношения и гармонической четвёрки, а также инвариантность при проективном преобразовании. Нумерация главы внутри файла отличается от имени файла. Источник проверен 16.09.2026.

https://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/files/LectureNotes/Projective_geometry/Chapter_4_The_Klein_programme.pdf

[2] Milanese M., Vicino A. Optimal Estimation Theory for Dynamic Systems with Set Membership Uncertainty: An Overview. In: Bounding Approaches to System Identification. Springer, 1996, pp.5-27. DOI: 10.1007/978-1-4757-9545-5_2. По издательской аннотации проверен общий контекст неизвестных, но ограниченных ошибок; конкретная теорема 6 данного отчёта доказана непосредственно, её заимствование из полного текста не заявляется.

https://doi.org/10.1007/978-1-4757-9545-5_2

[3] Casini M., Garulli A., Vicino A. Adaptive Threshold Selection for Set Membership State Estimation with Quantized Measurements. arXiv:2311.00611v2, 4 December 2023. Сопоставление по авторской аннотации: выбор порогов наблюдения для уменьшения радиуса информации. Рассматриваемый авторами адаптивный квантователь не тождествен фиксированному набору каналов RUN-035.

<https://arxiv.org/abs/2311.00611v2>

[4] Курпишев И.Б. Теорема Дезарга-Курпишева о двух кониках, центральной оси и гармонической точке. Авторский TeX из приложенного desargues_kurpishev_theorem_ru_source.zip. Для этого выпуска прочитаны определение гармонической точки и связанные предпосылки; полная независимая экспертиза теоремы о кониках не выполнялась.

[5] Курпишев И.Б. KLT-RBD, RUN-025: паспорт наблюдений и достаточность реперов; RUN-034: основания прогноза и граница конечных наблюдений. Внутренние математические и программные предшественники. Неизменённый observations.js включён в исследовательский комплект RUN-035 с контрольной суммой.

<https://klt-rbdv6-analyzer.workspace-406992.chatgpt.site/arbd/observation-mathematics.html>

<https://klt-rbdv6-analyzer.workspace-406992.chatgpt.site/arbd/basis-mathematics.html>